- Computer Architecture & Organization
- بنيان وتنظيم الحاسب

Chapter 3: Logic Gates

الوحدة 3: البوابات المنطقية

Definition:

- **Logical gates are electronic circuits that operates on one or more input signals to produce an output signal.**
- **The input and the output signal(s) have 2 states only which we represent by the binary values: "0" & "1"**
- **The logical gates are the basic elements of electronic circuits for computing and control in a computer.**

تعريف:

- **البوابات المنطقية هي دوائر إلكترونية تعمل على إشارة إلكترونية أو أكثر كمدخلات وتنتج إشارة كمخرج**
- **الإشارات المدخلة والمخرجة هي عبارة عن إشارات إلكترونية لها حالتين فقط نشير لهما بالأعداد الثنائية:"0"و"1"**
- **البوابات المنطقية هي العناصر الأساسية للدوائر الالكترونية الحاسوبية**

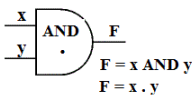
Basic logical gates:

البوابات المنطقية الأساسيات:

- There are 3 basic logical gates which implements the logical operators seen before and 4 others which are used for the ease of design and construction.

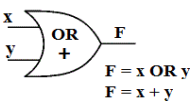
- يوجد ثلاثة بوابات أساسية التي تماثل المعاملات المنطقية الثلاثة ويوجد أربعة بوابات أساسية أخرى تستخدم لتسهيل عملية تصميم الدوائر الالكترونية والتصنيع

- Gate: AND



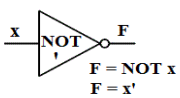
- البوابة: AND

- Gate: OR



- البوابة: OR

- Gate: NOT



- البوابة: NOT

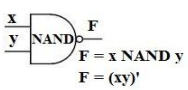
Other basic logical gates:

البوابات المنطقية الأساسيات الإضافية:

- 4 other basic logical gates which are used for the ease of design and construction

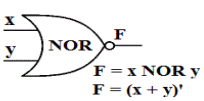
- أربعة بوابات أساسية إضافية تستخدم لتسهيل التصميم والتصنيع

- Gate: NAND



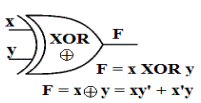
- البوابة: NAND

- Gate: NOR



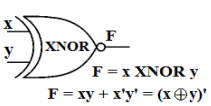
- البوابة: NOR

- Gate: XOR



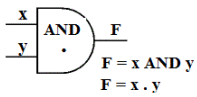
- البوابة: XOR

- Gate: NXOR

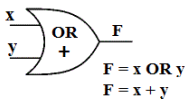


- البوابة: NXOR

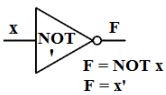
logical gate truth table:
جداول صدق البوابات المنطقية:



x	y	F = x . y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

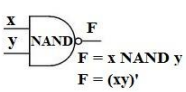


x	y	F = x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

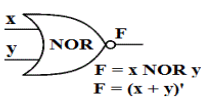


x	F = x’
0	1
1	0

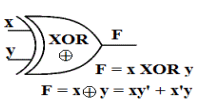
logical gate truth table:
جداول صدق البوابات المنطقية:



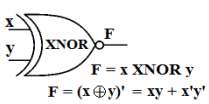
x	y	F = (xy)’
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



x	y	F = (x + y)’
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



x	y	F = xy’+x’y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



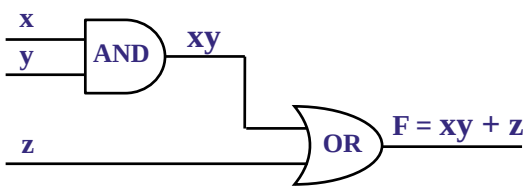
x	y	F = xy+x’y’
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Example**:
- **مثال** :

$$F = xy + z$$

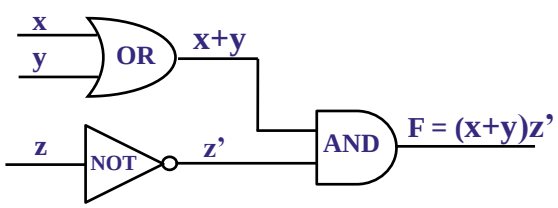


Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Another example**:
- **مثال آخر**:

$$F = (x+y)z'$$



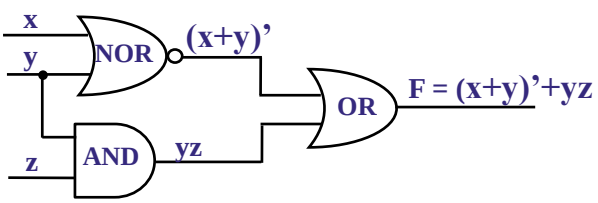
Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Another example**:

$$F = (x+y)'+yz$$

- **مثال آخر:**



Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Quick Test**:

  Draw the logical circuit for the following function:

$$F = (x'+y')z$$

- **تمرين سريع:**

  أرسم دائرة منطقية للدالة التالية:

Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Quick Test:**

  Draw the logical circuit for the following function:

  $F = (x+y)'(y+z)z'$

- **تمرين سريع:**

  أرسم دائرة منطقية للدالة التالية:

Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Quick Test:**

  Draw the logical circuit for the following function:

  $F = xy'+yz'+xz$

- **تمرين سريع:**

  أرسم دائرة منطقية للدالة التالية:

Implementation of Boolean functions with gates

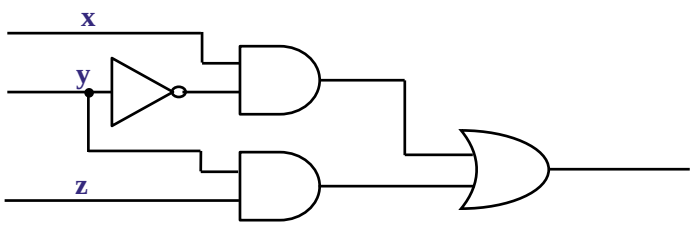
تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Quick Test:**

  Determine the logical function of the following logical circuit:

- **تمرين سريع:**

  أوجد الدالة التي تمثل الدائرة المنطقية التالية:



Implementation of Boolean functions with gates

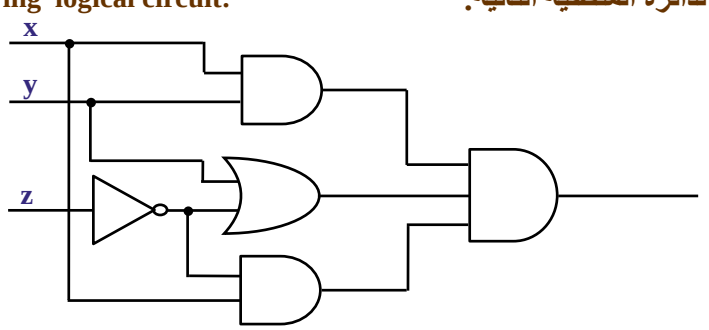
تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Quick Test:**

  Determine the logical function of the following logical circuit:

- **تمرين سريع:**

  أوجد الدالة التي تمثل الدائرة المنطقية التالية:



Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Full example**:

  Draw the logical circuit for the function which truth table is as follow

- **مثال متكامل:**

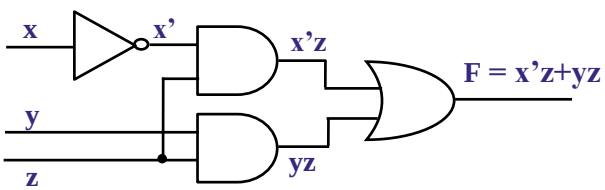
  أرسم دائرة منطقية للدالة الناتجة من جدول الصدق التالي وبعد اختصارها

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$F = x'y'z + x'yz + xyz$

$F = x'z + yz$ وبعد عملية الاختصار:

the function logical circuit / الدائرة المنطقية للدالة



Implementation of Boolean functions with gates

تطبيق الدوال البولينية على البوابات المنطقية

- **Quick Test**:

  Draw the logical circuit for the function which truth table is as follow

- **تمرين سريع :**

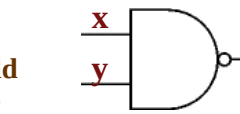
  أرسم دائرة منطقية للدالة الناتجة من جدول الصدق التالي وبعد اختصارها

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

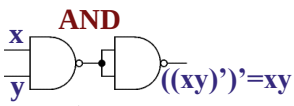
NAND Implementation
الدوائر المنطقية باستخدام بوابة NAND فقط

- **Any digital circuit can be implemented using only NAND gates. Which is more economical to build even though the circuits might be more complicated.**
- **Following are the equivalent NAND circuits for AND, OR & NOT.**

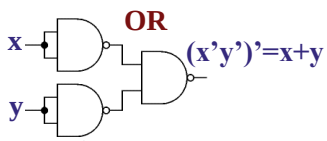
- يمكن تكوين أي دائرة منطقية باستخدام البوابة NAND فقط. وهذا يكون أكثر اقتصاديا رغم أن الدوائر المنطقية تكون في الغالب أكثر تعقيدا
- فيما يلي الدوائر NAND المكافئة للبوابات الأساسية الثلاثة



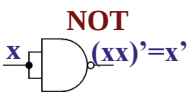
Gate: NAND البوابة:



AND البوابة
NAND باستخدام



OR البوابة
NAND باستخدام

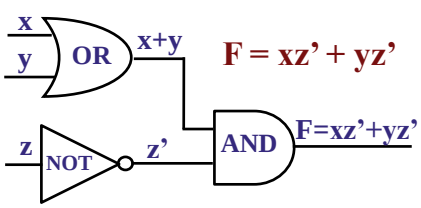


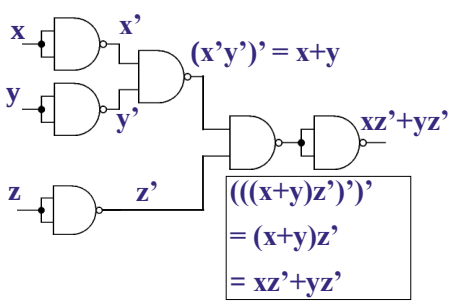
NOT البوابة
NAND باستخدام

NAND Implementation
الدوائر المنطقية باستخدام بوابة NAND فقط

- **Example: Find for the following circuit the equivalent which uses NAND gates only**

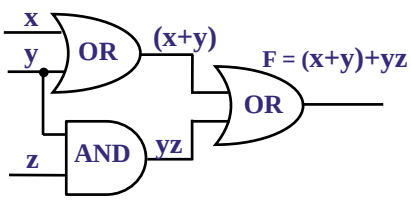
- مثال : حول الدائرة التالية إلى دائرة مكافئة تستخدم البوابات NAND فقط



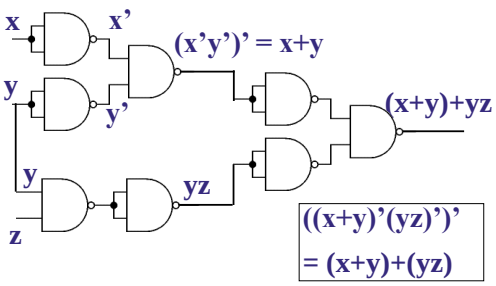


NAND Implementation
الدوائر المنطقية باستخدام بوابة NAND فقط

- **Another example: Find for the following circuit the equivalent which uses NAND gates only**

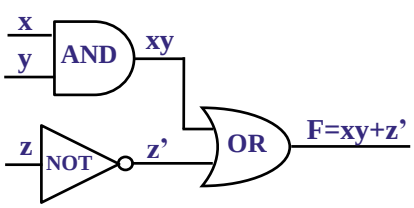


- **مثال آخر: تحويل الدائرة التالية إلى دائرة مكافئة تستخدم البوابات NAND فقط**



NAND Implementation
الدوائر المنطقية باستخدام بوابة NAND فقط

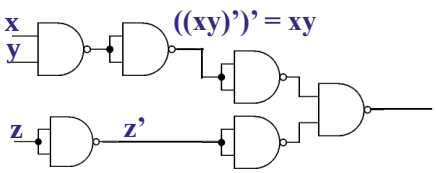
- **Quick Test: Find for the following circuit the equivalent which uses NAND gates only**



- **تمرين: حول الدائرة التالية إلى دائرة مكافئة تستخدم البوابات NAND فقط**

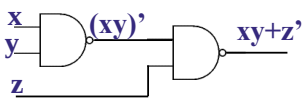
Gate-Level Minimization

- **Gate-level minimization in the logical electronic circuits is an important step in the design and manufacturing of logical circuits.**
- **In the last quick test the circuit can be minimized to a very simple circuit compared to the original one as shown in the following diagrams:**



اختصار مستويات البوابات:

- **اختصار مستويات البوابات في الدوائر الالكترونية المنطقية هو مرحلة مهمة في تصميم وصناعة الدوائر الالكترونية المنطقية**
- **في التمرين السابق يمكن اختصار الدائرة الى شكل بسيطة جدا كما يبين ذلك المخططات التالية:**



((xy)'z)' = ((xy)')' + z' = xy + z'

Gate-Level Minimization

- **We have seen this subject before and how to minimize boolean functions using Boolean rules like De-Morgan rule.**
- **We have seen that this method was not systematic which means that it is difficult to automate**
- **Fortunately M. Karnaugh has devised a systematic method based on 2 dimensional grid called Karnaugh Map or K-Map**

اختصار مستويات البوابات:

- **لقد رأينا هذا الموضوع من قبل ورأينا كيف يمكن اختصار الدوال المنطقية باستخدام قوانين الجبر البولين مثل قانون "دي. مورجان"**
- **ولكن لاحظنا أن تلك الطريقة غير منهجية ويصعب كتابة برنامج حاسب يقوم بتلك العملية إذا ما أردنا ميكنتها**
- **لحسن الحظ تم تطوير طريقة منهجية من قبل "م. كارنوج" (M.Karnaugh) خبير في مجال الحاسب والرياضيات التي نستعرضها في الشرائح التالية وتسمى بخريطة "كارنوج" أو باختصار خريطة "كا" Karnaugh Map or K-Map**

Gate-Level Minimization
Karnaugh Map or K-Map

اختصار مستويات البوابات:
خريطة "كارنوج" أو خريطة "كا"

1. K-Map is a table of rows and columns as shown in the following picture

1. خريطة "كا" هي عبارة عن جدول يتكون من صفوف وأعمدة كما يظهر ذلك في الشكل التالي:

2. This is an example of a K-Map of two variables x & y where x is put horizontally and y vertically.

x \ y	0	1
0	00 x'y'	01 x'y
1	10 xy'	11 xy

2. هذه خريطة لمتغيرتين فقط: x و y ونضع x عموديا و y أفقيا ونضع القيم 0 و 1 لكلتا المتغيرتين.

3. Each square refers to the couple of binary values of x & y as well as the expression which refers to that value

3. كل مربع يحتوى على القيماتان 0 أو 1 لكل من x و y و كذلك العبارة التى تشير إلى تلك القيمة

Gate-Level Minimization
Karnaugh Map or K-Map

اختصار مستويات البوابات:
خريطة "كارنوج" أو خريطة "كا"

4. Let suppose that we want to summarize the following function written in the form of sum of products: F = xy + x'y

4. لنفترض الآن أننا نريد اختصار الدالة التالية والمكتوبة على شكل جمع حواصل ضرب: F = xy + x'y

5. In the table we mark the squares that contain the products of the function expression.

x \ y	0	1
0	00 x'y'	01 x'y √
1	10 xy'	11 xy √

5. نأشر في الجدول على الخانات التي تحتوى على حواصل الضرب المكونة للدالة

6. Rule: any two marked squares that are adjacent horizontally or vertically will cause the removal of the dissimilar variable. In our example:

xy + x'y = y + y = y

6. قاعدة: أي خانتين متجاورتين أفوقيا أو عموديا يؤدي ذلك إلى حذف المتغير الغير مكرر من جمع العبارتين، إذا: xy + x'y تصبح: y = y + y

$$\Rightarrow \quad F = xy + x'y = y \quad \Leftarrow$$

$$F = y$$

Gate-Level Minimization
Karnaugh Map

اختصار مستويات البوابات:
خريطة "كارنوج"

- **Example: summarize the opposite function using Kartnaugh Map**

- **مثال : تلخيص الدالة المقابلة باستخدام خريطة "كارنوج"**

$$F = xy' + xy$$

1. We check in the table the squares that correspond to the minterms of the function
2. We remark that the 2 checked squares are adjacent and thus can be written as one term only: $xy' + xy = x$

1. نؤشر في الجدول على المربعات التي تناسب عناصر الدالة
2. نلاحظ أن الخانتان المؤشر عليها متجاورتان، إذا يمكن تلخيصهنا إلى عنصر واحد: $x = xy' + xy$

x \ y	0	1
0	00 x'y'	01 x'y
1	10 √ xy'	11 √ xy

$$\Rightarrow \quad F = xy' + xy = x \quad \Leftarrow$$

$$F = x$$

Gate-Level Minimization
Karnaugh Map

اختصار مستويات البوابات:
خريطة "كارنوج"

- **Example: summarize the opposite function using Kartnaugh Map**

- **مثال : تلخيص الدالة المقابلة باستخدام خريطة "كارنوج"**

$$F = (x+y)(x'+y')$$

1. We write the function in the form of a sum of products
1. We check the appropriate squares
1. We remark that there are no adjacent therefore the function stays as it is.

1. نحول الدالة إلى شكل جمع حواصل ضرب
1. نؤشر على المربعات المناسبة
1. نلاحظ أنه لا توجد مربعات متجاورة فتبقى الدالة كما هي

$$F = xx' + xy' + x'y + yy'$$
$$F = 0 + xy' + x'y + 0$$
$$F = xy' + x'y$$

x \ y	0	1
0	00 x'y'	01 √ x'y
1	10 √ xy'	11 xy

$$\Rightarrow \quad F = xy' + x'y \quad \Leftarrow$$

Gate-Level Minimization
Karnaugh Map

اختصار مستويات البوابات:
خريطة "كارنوج"

- **Quick test: summarize the opposite function using Kartnaugh Map**
- **اختبار سريع : تلخيص الدالة المقابلة باستخدام خريطة "كارنوج"**

F = x'y' + xy'

x \ y	0	1
0	00 x'y'	01 x'y
1	10 xy'	11 xy

F = ...

Gate-Level Minimization
Karnaugh Map

اختصار مستويات البوابات:
خريطة "كارنوج"

- **Quick test: summarize the opposite function using Kartnaugh Map**
- **اختبار سريع : تلخيص الدالة المقابلة باستخدام خريطة "كارنوج"**

F = x'y' + x'y

x \ y	0	1
0	00 x'y'	01 x'y
1	10 xy'	11 xy

F = ...

Gate-Level Minimization
اختصار مستويات البوابات:

Karnaugh Map with 3 variables
خريطة "كارنوج" بثلاثة متغيرات

1. We put x vertically and the product yz horizontally. We then put the permitted values of x vertically and all the permitted values of the expression yz horizontally in an order such as only one digit changes from one value to the next one, for example: 00, 01, 11, 10

1. نضع المتغير x عموديا والعبارة yz أفوقيا ثم نضع 0 و 1 عموديا ونضع أفوقيا القيم المتاحة للعبارة xy وهي: 00، 01، 11، 10 في هذا التسلسل حيث من قيمة إلى قيمة الموالية تتغير قيمة خانة واحدة فقط

2. Then we put in each square the appropriate binary value and also the expression which refers to that value

x \ yz	00	01	11	10
0	000 x'y'z'	001 x'y'z	011 x'yz	010 x'yz'
1	100 xy'z'	101 xy'z	111 xyz	110 xyz'

2. ثم نضع في كل مربع القيمة الثنائية المناسبة والعبارة الجبرية التي تشير إلى تلك القيمة

Gate-Level Minimization
اختصار مستويات البوابات:

Karnaugh Map with 3 variables
خريطة "كارنوج" بثلاثة متغيرات

3. **Summarization Rules**:
   - Any 2 squares in the extremities and in the same row are considered adjacent
   - Two adjacent squares lead to a term with 2 variables only
   - Four adjacent squares lead to a term with one variable only
   - Eight adjacent squares lead to a term with the constant '1'

x \ yz	00	01	11	10
0	√ 000 x'y'z'	001 x'y'z	011 x'yz	√ 010 x'yz'
1	√ 100 xy'z'	101 xy'z	111 xyz	√ 110 xyz'

xyz + xyz' = xy
xy'z' + xyz' = xz'
xy'z' + xy'z + xyz + xyz' = x
x'yz + x'yz' + xyz + xyz' = y
x'y'z' + x'y'z + x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z + xyz + xyz' = 1

3. **قواعد الاختصار:**
   - الخانات في الأطراف وفي نفس الصف تعتبر متجاورة
   - خانتين متجاورتين أفوقيا أو عموديا يؤدي ذلك إلى عبارة من متغيرتين فقط
   - 4 خانات متجاورة يؤدي ذلك إلى عبارة من متغير واحد
   - 8 خانات متجاورة ينتج عنها عبارة تساوي الثابت "1"

Gate-Level Minimization
اختصار مستويات البوابات:

Karnaugh Map with 3 variables
خريطة "كارنوج" بثلاثة متغيرات

- **Example: summarize the opposite function using Kartnaugh Map**

$$F = x'y'z + x'yz + xyz + xyz'$$

1. We check in the table the squares that correspond to the minterms of the function
2. For each 2 adjacent squares we write the corresponding term, we get : $x'z + xy$

x \ yz	00	01	11	10
0	000 x'y'z'	001√ x'y'z	011√ x'yz	010 x'yz'
1	100 xy'z'	101 xy'z	111√ xyz	110√ xyz'

- **مثال : تلخيص الدالة المقابلة باستخدام خريطة "كارنوج"**

1. نؤشر في الجدول على المربعات التي تناسب عناصر الدالة
2. لكل مربعتان متجاورتان نكتب العنصر المناسب $x'z + xy$

$$\Rightarrow \quad F = x'z + xy \quad \Leftarrow$$

Gate-Level Minimization
اختصار مستويات البوابات:

Karnaugh Map with 3 variables
خريطة "كارنوج" بثلاثة متغيرات

- **Example: summarize the opposite function using Kartnaugh Map**

$$F = x'y'z' + xy'z' + x'yz' + xyz'$$

1. We check in the table the squares that correspond to the minterms of the function
2. We remark that we have 4 adjacent squares which correspond to un term with only 1 variable: z'

x \ yz	00	01	11	10
0	000√ x'y'z'	001 x'y'z	011 x'yz	010√ x'yz'
1	100√ xy'z'	101 xy'z	111 xyz	110√ xyz'

- **مثال : تلخيص الدالة المقابلة باستخدام خريطة "كارنوج"**

1. نؤشر في الجدول على المربعات التي تناسب عناصر الدالة
2. نلاحظ أن لدينا هنا 4 مربعات متجاورة تلخص إذا إلى عنصر ذات مغير واحد: z'

$$\Rightarrow \quad F = z' \quad \Leftarrow$$

Gate-Level Minimization

Karnaugh Map with 3 variables

اختصار مستويات البوابات:

خريطة "كارنوج" بثلاثة متغيرات

- **Quick test: summarize the following function using Kartnaugh Map**

- **تمرين سريع : تلخيص الدالة التالية باستخدام خريطة "كارنوج"**

$$F = x'y'z' + xy'z + xyz + xyz'$$

x \ yz	00	01	11	10
0	000√ x'y'z'	001 x'y'z	011 x'yz	010√ x'yz'
1	100 xy'z'	101√ xy'z	111√ xyz	110 xyz'

F = ……..

Gate-Level Minimization

Karnaugh Map with 3 variables

اختصار مستويات البوابات:

خريطة "كارنوج" بثلاثة متغيرات

- **Quick test: summarize the following function using Kartnaugh Map**

- **تمرين سريع : تلخيص الدالة التالية باستخدام خريطة "كارنوج"**

$$F = x'y'z' + xy'z' + x'yz + xyz + x'yz' + xyz'$$

x \ yz	00	01	11	10
0	000√ x'y'z'	001 x'y'z	011√ x'yz	010√ x'yz'
1	100√ xy'z'	101 xy'z	111√ xyz	110√ xyz'

F = ……..

Gate-Level Minimization

اختصار مستويات البوابات:

Karnaugh Map with 4 variables

خريطة "كارنوج" بأربع متغيرات

1. We draw this time a table of 4 rows and 4 columns.
1. نرسم هذه المرة جدول من أربعة صفوف وأربعة أعمدة
2. We put the products wx and yz vertically and horizontally. We then put the permitted values of wx vertically and the permitted values of yz horizontally in an order such as only one digit changes from one value to the next one, for example: 00, 01, 11, 10
2. نضع المتغيران wx عموديا والمتغيران yz أفوقيا ثم نضع عموديا وأفوقيا القيم المتاحة لي wx و yz وهي: 00، 01، 11، 10 في هذا التسلسل حيث من قيمة إلى قيمة الموالية تتغير قيمة خانة واحدة فقط
3. Then we put in each square the appropriate binary value and also the expression which refers to that value
3. ثم نضع في كل مربع القيمة الثنائية المناسبة والعبارة الجبرية التي تشير إلى تلك القيمة

wx \ yz	00	01	11	10
00	0000 w'x'y'z'	0001 w'x'y'z	0011 w'x'yz	0010 w'x'yz'
01	0100 w'xy'z'	0101 w'xy'z	0111 w'xyz	0110 w'xyz'
11	1100 wxy'z'	1101 wxy'z	1111 wxyz	1110 wxyz'
10	1000 wx'y'z'	1001 wx'y'z	1011 wx'yz	1010 wx'yz'

Gate-Level Minimization

اختصار مستويات البوابات:

Karnaugh Map with 4 variables

خريطة "كارنوج" بأربع متغيرات

- **Example**: summarize the opposite function using Kartnaugh Map
- مثال : تلخيص الدالة المقابلة باستخدام خريطة "كارنوج"

$$F = w'x'y'z' + w'x'yz' + w'xyz' + w'xyz$$

We proceed in the same manner as with 3 variables. We check the appropriate squares then we simplify the expression of the adjacent squares, if there are any, in the same way as before.

نطبق نفس طريقة ثلاثة متغيرات حيث نؤشر على المربعات المناسبة لعناصر الدالة ثم نلاحظ المربعات المتجاورة ثم نكتب المربعات المتجاورة بالصيغة المختصرة المناسبة

wx \ yz	00	01	11	10
00	0000√ w'x'y'z'	0001 w'x'y'z	0011 w'x'yz	0010√ w'x'yz'
01	0100 w'xy'z'	0101 w'xy'z	0111√ w'xyz	0110√ w'xyz'
11	1100 wxy'z'	1101 wxy'z	1111 wxyz	1110 wxyz'
10	1000 wx'y'z'	1001 wx'y'z	1011 wx'yz	1010 wx'yz'

$$\Rightarrow F = w'x'z' + w'xy$$

Gate-Level Minimization
اختصار مستويات البوابات:

Karnaugh Map with 4 variables
خريطة "كارنوج" بأربع متغيرات

- **Quick Test: summarize the following function using Kartnaugh Map**
- **مثال : تلخيص الدالة التالية باستخدام خريطة "كارنوج"**

$$F = x'z + w'xy' + w(x'y + xy')$$

$$\Rightarrow \quad F = x'z + w'xy' + wx'y + wxy'$$

wx \ yz	00	01	11	10
00	0000 w'x'y'z'	0001 w'x'y'z	0011 w'x'yz	0010 w'x'yz'
01	0100 w'xy'z'	0101 w'xy'z	0111 w'xyz	0110 w'xyz'
11	1100 wxy'z'	1101 wxy'z	1111 wxyz	1110 wxyz'
10	1000 wx'y'z'	1001 wx'y'z	1011 wx'yz	1010 wx'yz'

F = …….....

▪ Computer Architecture & Organization

▪ بنيان وتنظيم الحاسب

Chapter 3: Logic Gates
الوحدة 3: البوابات المنطقية

End OF Chap. 3
نـهـايـــة الـوحــدة 3